28. APLICACIONES AFINES Y MOVIMIENTOS

28.1. APLICACIONES AFINES

Una aplicación $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida en el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^n$, se dice que es una **aplicación afín** si es el resultado de trasladar una aplicación lineal en $\mathbb{R}^n$, por tanto tiene una expresión matricial, en base canónica, de la forma:

$$F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

Dada una aplicación afín F, se llama **punto fijo** a todo punto de $\mathbb{R}^n$ cuyo transformado por F es el mismo punto. El conjunto de los puntos fijos de una aplicación afín F se notará por $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(F) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$$

OBSERVACIÓN

El conjunto de puntos fijos de la aplicación afín $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ es:

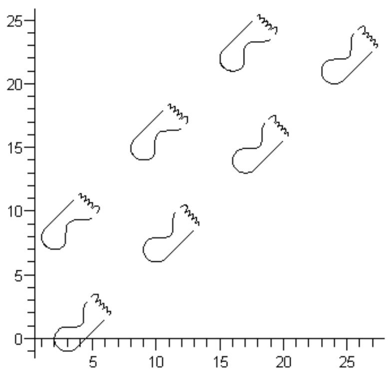
$$\begin{aligned}\mathcal{F}(F) &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{b}\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : (A - I_n)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{b}\}\end{aligned}$$

Y por tanto se puede calcular como el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes es $A - I_n$ y término independiente $-\boldsymbol{b}$.

28.2. MOVIMIENTOS

Se llama **movimiento o isometría** a toda aplicación afín $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que resulta de trasladar una aplicación ortogonal, es decir que su expresión en base canónica es de la forma:

$$F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \qquad \text{con} \qquad A^t\, A = I_n$$



OBSERVACIONES

- Las traslaciones no alteran las distancias y los ángulos por lo que los movimientos, al igual que las aplicaciones ortogonales, conservan distancias y ángulos.
- Un movimiento definido por $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ es una aplicación ortogonal.

EJEMPLO 10

Para cada una de las aplicaciones afines dadas $F_i: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ estudiar si se trata de un movimiento y calcular el conjunto de puntos fijos.

a) $F_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $F_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución

a) $F_1(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b_1}$, siendo $A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

La aplicación afín F_1 es un movimiento si y sólo si $A_1^t\,A_1 = I_3$, y se tiene que:

$$A_1^t\,A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3$$

De donde se deduce que F_1 es un movimiento. Su conjunto de puntos fijos es:

$$\mathcal{F}(F_1) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : F_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : (A_1 - I_3)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{b_1}\}$$

$$(A_1 - I_3|-\boldsymbol{b_1}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4/3 & -2/3 & -2/3 & -4/3 \\ -2/3 & -1/3 & -1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 & -1/3 & -2/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego el conjunto de puntos fijos por F_1 constituye un plano:

$$\mathcal{F}(F_1) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 2x_1 + x_2 + x_3 = 2\right\}$$

b) $F_2(\boldsymbol{x}) = A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b_2}$, siendo $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La aplicación afín F_2 es un movimiento si y sólo si $A_2^t\,A_2 = I_3$, y se tiene que:

$$A_2^t\,A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq I_3$$

De donde se deduce que F_2 no es un movimiento.

Su conjunto de puntos fijos es: $\mathcal{F}(F_2) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : (A_2 - I_3)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{b_2}\}$

$$(A_2 - I_3|-\boldsymbol{b_2}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Luego el único punto fijo por F_2 es $\mathcal{F}(F_2) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$